

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОДЪЕМНО-НАВЕСНЫХ УСТРОЙСТВ МОБИЛЬНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СРЕДСТВ

В.Б. Попов

к.т.н., доцент кафедры сельскохозяйственных машин  
«ГГТУ им.П.О. Сухого», г. Гомель, Республика Беларусь



*Многофункциональный  
технологический  
агрегат, мобильное  
энергетическое  
средство,  
подъемно-навесное  
устройство,  
гидропривод,  
механизм навески,  
математическая  
модель, передаточное  
число, грузоподъемность*

*The multipurpose  
technological assembly,  
mobile power means,  
the elevating mounting  
implement, the hydraulic  
drive, the hanging up  
mechanism, a mathematical  
model, gear ratio,  
weight-lifting capacity*

Мобильные энергетические средства (МЭС), к которым относят тракторы, самоходные шасси и универсальные энергетические средства, предназначены для различных видов работ в составе многофункциональных технологических агрегатов (МТА). Известно достаточно примеров применения МЭС в растениеводстве [1]. Среди их достоинств – возможность эксплуатации в агрегате с разными машинами и орудиями 7–8 месяцев в году. Здесь уместно отметить универсальное энергетическое средство УЭС-2-250А «Полесье» (рис.1), которое в качестве энергоносителя способно обеспечить выполнение до трех технологических операций за один проход.

Функциональная связь МЭС с навесными машинами (НМ) и орудиями осуществляется посредством подъемно-навесных устройств (ПНУ), влияющих на характеристики всего МТА. ПНУ, как неотъемлемая часть МЭС, разрабатывается в режиме автоматизированного проектирования, что предполагает регулярное обращение к математическим моделям (ММ), имитирующим различные режимы работы ПНУ в составе МТА. Функциональные ММ – основные компоненты математического обеспечения, обеспечивающие рациональный выбор параметров ПНУ.

Цель данной работы – представление основных моментов в формализованном описании одного из режимов работы МТА – процесса



Рисунок 1 – Универсальный комбинированный агрегат УКА-6 в составе: энергосредства УЭС-2-250А, сеялки СУ-12 для внесения минеральных удобрений, бороны ротационной БНР-6, сеялки точного высева СТВ-12

перевода НМ из рабочего положения в транспортное посредством ПНУ МЭС.

ПНУ состоит из двух компонентов – гидропривода и механизма навески (МН). Расчет выходных параметров МН выполняется существенно проще, если 3D-модель МН УЭС (рис. 2а) преобразовать в плоский аналог (рис. 2б). Другими допущениями здесь являются: несжимаемость звеньев МН и постоянство скорости изменения обобщенной координаты.

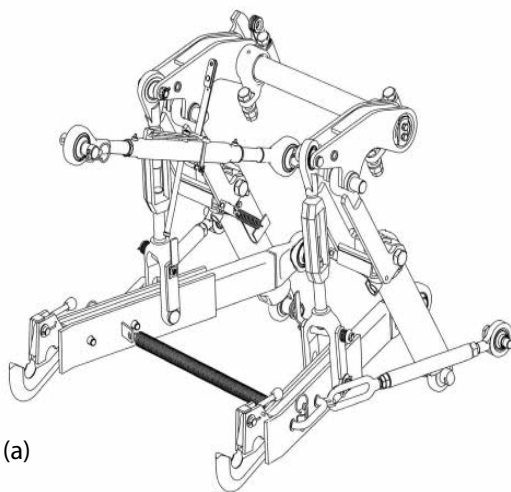
Для определения положения подвижных шарниров МН, аналогов угловых скоростей звеньев и линейных скоростей характерных точек последовательно выполняются процедуры геометрического и кинематического анализа, представленные на рис.2б кинематической цепи. В основе лежит метод замкнутого векторного контура [2].

В результате выполнения процедуры геометрического анализа в базовой системе координат, связанной с МЭС, определяются углы, образуемые подвижными звеньями замкнутой кинематической цепи, а также координаты всех подвижных шарниров МН и характерных точек. В частности, координаты оси подвеса МН –  $\Pi_{56}$  определяются по выражениям:

$$\begin{aligned} X_{56}(S) &= X_{05} + L_{56} \cdot \cos \varphi_5(S); \\ Y_{56}(S) &= Y_{05} + L_{56} \cdot \sin \varphi_5(S), \end{aligned} \quad (1)$$

где:  $X_{05}, Y_{05}$  – координаты шарнира  $\Pi_{05}$  на раме МЭС;  $\varphi_5$  – угол, образуемый звеном  $L_5$ .

Координаты характерной точки – центра тяжести навесной машины – определяются в соответствии с выражениями:



(а)

$$X_{S6}(S) = X_{56}(S) + L_{S6} \cdot \cos[\varphi_6(S) + \varphi_{S6}]; \quad (2)$$

$$Y_{S6}(S) = Y_{56}(S) + L_{S6} \cdot \sin[\varphi_6(S) + \varphi_{S6}], \quad (3)$$

где:  $L_{S6}$  и  $\varphi_{S6}$  – характеристики вектора, проведенного от оси подвеса в центр тяжести НМ.

Аналитические выражения (1 – 3) представляют собой функции положения для заднего МН УЭС, необходимые для формирования процедур кинематического и силового анализа.

Дифференцируя выражение для угла  $\varphi_3$  по обобщенной координате ( $S$ ), получим аналог угловой скорости поворотного рычага МН  $L_3$  (рис.2):

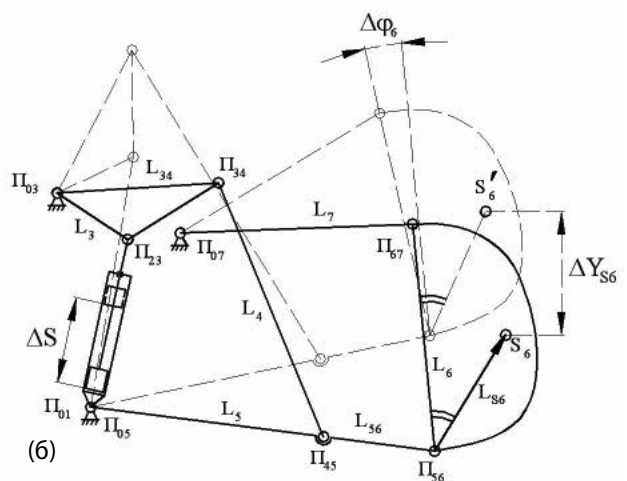
$$\varphi_3' = \frac{2 \cdot S}{\sqrt{4 \cdot L_{13}^2 \cdot L_3^2 - [S^2 - L_{13}^2 - L_3^2]^2}}$$

Продифференцировав по времени ( $t$ ) выражения для проекций на оси местных систем координат  $X'\Pi_{03}Y'$ ,  $X''\Pi_{05}Y''$ , и выполнив некоторые преобразования, получим выражения для передаточных отношений угловых скоростей между звеньями  $L_{34}$  ( $L_3$ ) и  $L_5, L_6$  и  $L_5$ :

$$U_{53} = \frac{L_{34} \cdot \sin(\varphi_{34} - \varphi_4)}{L_5 \cdot \sin(\varphi_5 - \varphi_4)};$$

$$U_{65} = \frac{L_{56} \cdot \sin(\varphi_5 - \varphi_7)}{L_6 \cdot \sin(\varphi_7 - \varphi_6)}.$$

Через полученные передаточные отношения скоростей звеньев определяются аналоги угловых скоростей для звеньев  $L_5, L_6$ :



(б)

Рисунок 2 – Заднее подъемно-навесное устройство УЭС (а) и плоский аналог кинематической цепи, включающий механизм навески УЭС и навесную машину (б)

$$\varphi'_5 = \varphi'_3 \cdot U_{53}, \quad \varphi'_6 = \varphi'_3 \cdot U_{53} \cdot U_{65}.$$

Важным выходным параметром МН являются передаточные числа (ПЧ) – переменные величины, характеризующие текущее соотношение скоростей характерных точек механизмов. Например, в процессе сравнения вариантов МН часто используют передаточное число МН на оси подвеса [3], которое представляет собой аналог вертикальной составляющей скорости точки  $\Pi_{56}$ . Аналитическое выражение для этого ПЧ формируется из выражений для передаточного отношения  $U_{53}$  аналога угловой скорости  $\varphi'_3$  и угла  $\varphi_5$ :

$$I_{56} = \varphi'_3 \cdot U_{53} \cdot L_{56} \cdot \cos \varphi_5 \quad (4)$$

Аналитическое выражение для аналога вертикальной составляющей скорости центра тяжести НМ ( $S_6$ ) или основного передаточного числа МН получим, дифференцируя по времени выражение для вертикальной координаты  $Y_{S6}$  и разделив обе части полученного выражения на  $\dot{S}$ :

$$I_S = \varphi'_3 \cdot U_{53} \cdot [L_{56} \cdot \cos \varphi_5 + U_{65} \cdot L_{S6} \cdot \cos(\varphi_6 + \varphi_{S6})]. \quad (5)$$

Определив величину  $I_S$  по формуле (5), можно не выполняя силового анализа, определить полезную нагрузку, приходящуюся на поршень гидроцилиндра:

$$F_{пол} = P_6 \cdot I_S.$$

Полученные выше передаточные числа на оси подвеса МН –  $I_{S6}$  и в центре тяжести навесной машины –  $I_S$ , величины безразмерные, взаимосвязь между которыми очевидна [4]. Они характеризуют кинематические свойства МН, определяют его внутренними параметрами и не зависят от скорости изменения обобщенной координаты. Следует отметить, что при подъеме НМ выполняет относительно энергоносителя сложное движение, что учитывается при выполнении динамического анализа, и поэтому необходимо подробное описание кинематики МН в процессе подъема.

Последовательность проведения силового анализа МН соответствует обратному порядку его структурной формулы, т.е. начинается с последней группы 2-го класса, 2-го порядка 1-го вида (рис. 26). Весом звеньев МН при формировании ММ пренебрегаем. Расчетная схема, в которую входит группа  $L_7 - L_6$  описывается ММ, состоящей из 4-х алгебраических уравнений. Уравнения представляют состояние равновесия группы при действии на  $L_7 - L_6$  сил и моментов, приложен-

ных относительно шарнира  $\Pi_{67}$ . При этом на плоскости сила в шарнире  $\Pi_{56}$  фактически представляет сумму от двух составляющих, разделенных поровну по шарнирам двух нижних тяг МН:

$$\begin{cases} R_{07}^x + 2 \cdot R_{56}^x = 0; \\ R_{07}^y + 2 \cdot R_{56}^y = -P_6; \\ R_{07}^x \cdot (Y_{67} - Y_{07}) + R_{07}^y \cdot (X_{07} - X_{67}) = 0; \\ 2 \cdot R_{56}^x \cdot (Y_{67} - Y_{56}) + 2 \cdot R_{56}^y \cdot (X_{56} - X_{67}) = -P_6 \cdot (X_{S6} - X_{67}). \end{cases}$$

Система из 4-х уравнений имеет 4 неизвестных и решается подстановкой, либо по методу Крамера. Для упрощения выражений для сил, действующих в шарнирах, используем промежуточные переменные:

$$\begin{aligned} D &= Y_{67} - Y_{56}, & E &= X_{56} - X_{67}; \\ F &= Y_{67} - Y_{07}, & G &= X_{07} - X_{67}; \\ A &= E \cdot F - D \cdot G; \\ M_6 &= -P_6 \cdot (X_{S6} - X_{56}), \end{aligned}$$

где:  $X_{ij}, Y_{ij}$  – координаты центров шарниров звеньев группы  $L_6 - L_7$ ;  $D, E, F, G$  – переменная разность координат.

Результаты решения системы уравнений приведены ниже:

$$\begin{aligned} R_{56}^x &= \frac{M_6 \cdot G}{2 \cdot A}; \\ R_{56}^y &= P_6 \cdot \frac{(X_{S6} - X_{67}) \cdot F - G \cdot D}{2 \cdot A}; \\ R_{07}^x &= -R_{56}^x \cdot 2; & R_{07}^y &= -R_{07}^x \cdot \frac{F}{G}; \\ R_{67}^x &= 2 \cdot R_{56}^x; & R_{67}^y &= 2 \cdot R_{56}^y - P_6. \end{aligned}$$

где:  $R_{ij}^x, R_{ij}^y$  – составляющие сил, действующих в шарнирах группы  $L_6 - L_7$ ;

$R_{07}^x, R_{07}^y$  – составляющие сил, действующих в шарнире верхней тяги, расположенном на раме энергоносителя.

Модуль общей реакции в шарнире определяется по известному выражению:

$$R_{ij} = \sqrt{(R_{ij}^x)^2 + (R_{ij}^y)^2}; \quad R_{0i} = \sqrt{(R_{0i}^x)^2 + (R_{0i}^y)^2}.$$

Силовой анализ других групп Ассуря выполняется аналогично.

Потери мощности в неподвижных шарнирах МН определяются по выражению [5]:

$$N_{01} = f_{мп} \cdot r_{01} \cdot R_{01} \cdot \varphi'_{12} \cdot \dot{S},$$

где:  $\varphi'_{12}(S)$  – аналог угловой скорости звеньев 1 и 2 – гильзы и поршня гидроцилиндра;

$f_{mp}$  – коэффициент трения в шарнире;  $r_{01}$  – радиус шарнира.

Потери мощности в подвижных шарнирах МН определяются по выражению:

$$N_{23} = f_{mp} \cdot r_{23} \cdot R_{23} \cdot (\varphi'_{12} + \varphi'_3) \cdot \dot{S}.$$

Расчет приведенной к поршню силы трения выполняем, считая ее равной отношению от деления суммы мгновенных мощностей трения, затрачиваемых в шарнирах МН, на  $\dot{S}$ .

Приведенная сила трения определяется по результатам кинематического и силового анализа. Если предположить, что радиусы шарниров в кинематических парах одинаковы, то:

$$F_{mp}^{np} = F_{mpc} + r \cdot f_{mp} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^7 R_{0i} \cdot \varphi'_i + \sum_{i=1}^7 R_{ij} \cdot (\varphi'_i \pm \varphi'_{i+1}) \right\}, (6)$$

где:  $r$  – радиус шарниров, мм;  $f_m$  – коэффициент трения в паре;  $R_{0i}, R_{ij}$  – силы реакций соответственно в неподвижных и подвижных шарнирах МН;  $\varphi'_i, \varphi'_{i+1}$  – аналоги угловых скоростей звеньев МН;  $F_{mpc}$  – сила трения манжеты гидроцилиндра [5].

$$F_{mpc} = \pi \cdot D \cdot l \cdot f_c \cdot p_m,$$

где:  $D$  – диаметр поршня ГЦ, мм;  $l$  – ширина манжеты, мм;  $f_c$  – коэффициент трения манжеты о гильзу ГЦ;  $p_m$  – среднее давление в напорной полости гидроцилиндра.

Анализ динамики подъема НМ составляет условие рационального проектирования ПНУ. Упрощенная схема гидропривода представлена на рисунке 3. В процессе подъема НМ в элементах МН возникают переменные нагрузки, поэтому без знания закона движения поршня гидроцилиндра  $S(t) = f(S, \dot{S}, \ddot{S}, t)$  нельзя проанализировать их изменение.

Масса и момент инерции НМ приводятся к ГЦ. Из закона равенства кинетических энергий приведенная масса, с учетом вышеупомянутых допущений, определяется как:

$$m(S) = m_6 \cdot I_V^2 + J_6 \cdot \varphi_6'^2,$$

где:  $m_6, J_6$  – соответственно масса и момент инерции НМ;

$I_V, \varphi_6'$  – аналоги линейной скорости центра тяжести и угловой скорости навесной машины.

При формировании ФММ динамики подъема НМ учитываются особенности работы ПНУ [6]. Принимаем, что большинство элементов гидропривода работает безынерционно, а температура, плотность, вязкость рабочей жидкости (РЖ) и количество нерастворенного в ней воздуха постоянны. Неустановившийся режим течения РЖ в напорной магистрали во время переходного процесса имеет ламинарно-турбулентный характер.

РЖ в гидроприводе МЭС представляет двухфазную гидровоздушную смесь. Ее модуль объемной упругости  $E_c$  при адиабатическом характере деформации зависит от содержания нерастворенного в РЖ воздуха и начального давления. Неравномерность подачи гидронасоса практически не влияет на процесс подъема. Считается, что заполняющая напорный тракт гидровоздушная смесь сосредоточена в объеме небольшой протяженности, сосредоточенном у гидроцилиндра.

Приведенный модуль объемной упругости для деформирующихся полостей трубопровода, рукавов высокого давления и гидроцилиндра определяется по выражению [6]:

$$E_{np} = \frac{E_c}{1 + \frac{E_c \cdot D}{E_m \cdot \delta}},$$

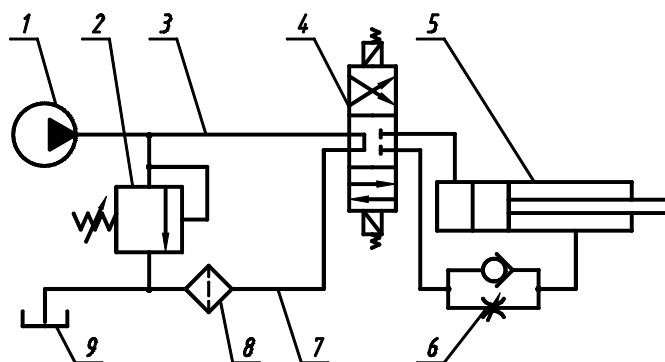


Рисунок 3 – Упрощенная принципиальная схема гидропривода ПНУ МЭС:

1 – насос шестеренный; 2 – клапан предохранительный; 3 – напорная магистраль; 4 – гидрораспределитель; 5 – гидроцилиндр; 6 – регулируемый дроссель; 7 – сливная магистраль; 8 – фильтр; 9 – бак

где:  $E_m$  – модуль объемной упругости материала полости;  $D, \delta$  – соответственно внутренний диаметр и толщина стенки полости.

Используя уравнение неразрывности, выражаем перемещение столба жидкости и его производные через аналогичные параметры движущегося поршня гидроцилиндра. На основании отмеченного, уравнение баланса давлений для участка гидронасос - гидроцилиндр записывается:

$$a_1 \cdot \ddot{S} + a_2 \cdot \dot{S} + a_3 \cdot S^2 + p_2 = p_1, \quad (7)$$

где:  $p_1, p_2$  – давление в гидронасосе и гидроцилиндре;

$a_1, a_2, a_3$  – коэффициенты пропорциональности, соответствующие инерционным, магистральным и местным потерям давления [6].

Уравнение баланса объемного расхода РЖ для гидроцилиндра принимает вид:

$$\dot{S} = \dot{S}_1 - \frac{V_0 + F_H \cdot (S - S_0)}{F_H \cdot E_{np}} \cdot \dot{p}_2', \quad (8)$$

где:  $V_0$  – начальный объем жидкости в узле;  $S_0$  – начальное значение обобщенной координаты;  $dS_1/dt, dS/dt$  – эквивалентные скорости перемещения в узлах;  $F_H$  – площадь сечения поршня гидроцилиндра.

Уравнение движения нагруженного поршня получаем из уравнения Лагранжа 2-го рода, подставив в него известное выражение для кинетической энергии и выполнив несложные преобразования. При этом обобщенная сила  $Q(S)$  равна разности между движущей силой  $F_{об}$  на штоке гидроцилиндра и приведенной к нему со стороны НМ нагрузки. Дифференциальное уравнение (ДУ) движения поршня гидроцилиндра с учетом приведенной силы трения  $F_{mp}^{np}$  записывается в виде:

$$m(S) \cdot S + 0,5 \cdot m(S) \cdot \dot{S} + F_{mp}^{np} + P_{пол} = p_2 \cdot F_H, \quad (9)$$

где:  $p_2 \cdot F_H$  – движущая сила;  $0,5 \cdot m(S) \cdot \dot{S}^2$  – компонента силы инерции, действующая в установившемся режиме подъема НМ.

Система уравнений (7–9) представляет ММ, описывающую динамику подъема НМ. Система ДУ решается по методу Рунге–Кутты 4-го порядка.

В результате определения всех составляющих получаем уточненное аналитическое выражение для грузоподъемности ПНУ [3], что позволит оперативно выполнять его многовариантную оценку для различных МЭС, а также определять для них запас по грузоподъемности:

$$G_S = \frac{p_2^{\max} \cdot F_H - [F_{ин}^{np} + F_{mp}^{np}]}{I_S^{\max}}.$$

Разработанная функциональная математическая модель анализа перевода навесной машины из рабочего в транспортное положение при помощи ПНУ может быть использована для большинства ПНУ известных отечественных и зарубежных МЭС. Расчет выходных параметров ПНУ ведется в программной среде Mathcad. Результаты расчета параметров ПНУ для режима подъема навесной машины далее используются для расчета ПНУ в рабочем и транспортном режимах. Аналитическое выражение грузоподъемности ПНУ эффективно используется как для оценки возможности агрегатирования с НМ в энергетическом аспекте, так и для определения запаса по грузоподъемности ПНУ МЭС при расширении шлейфа навесных машин и орудий. Кроме того, разработанная функциональная ММ анализа процесса подъема навесной машины является основным компонентом для ММ оптимизационного синтеза ПНУ.

### Литература

1. Тракторы: конструирование и расчет [Текст] / под ред. И.П. Ксеновича. – М.: Машиностроение, 1992. – 544 с.
2. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин [Текст] / И.И. Артоболевский. – М.: Машиностроение, 1988. – 687 с.
3. Гуськов, В.В. Тракторы [Текст]. Часть III. Конструирование и расчет / В.В. Гуськов. – Мн.: Вышэйш. шк. 1981. – 383 с.
4. Попов, В.Б. Аналитические выражения кинематических передаточных функций механизмов навески энергоносителей [Текст] / В.Б. Попов // Вестник ГГТУ им. П.О.Сухого. – 2000. – № 2. – С. 25-29.
5. Озол, О.Г. Теория механизмов и машин [Текст]: пер. с латыш. / О.Г. Озол; под ред. С.Н. Кожевникова. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 432 с.
6. Попов, В.Б. Математическое моделирование гидропривода подъемно-навесного устройства мобильного агрегата [Текст] / В.Б. Попов, В.А. Довгяло // Тез. докл. Междунар. науч.- практ. конф. Ч. II / под общ. ред. В.И. Сенько. – Гомель: БелГУТ, 2003. – С. 103–106.